DREAPTA ÎN SPAȚIU ȘI PLANUL

① Se dau planele

$$(P_1)\quad 3x - y + z + 1 = 0,$$
$$(P_2)\quad x + y + z - 2 = 0.$$

a) Să se scrie ecuațiile canonice ale dreptei (D) de intersecție a celor două plane.

b) Să se scrie ecuațiile explicite ale dreptei D.

c) Să se găsească planul care trece prin dreapta (D) și este perpendicular pe planul

$$(P)\quad x - 2y + 3z - 4 = 0.$$

d) Să se determine ecuația planului Q care trece prin punctul $M_0(1, -5, -3)$ și este perpendicular pe planele (P_1) și (P_2).

e) Să se calculeze unghiul diedru dintre planele (P_1) și (P_2)

f) Să se calculeze distanța de la M_0 la (P).

g) Să se scrie ecuațiile proiecției ortogonale a dreptei (D) pe planul (P).

Rezolvare a) Normalele $\vec{N}_1$ și $\vec{N}_2$ la cele două plane sunt: $\vec{N}_1 = (3, -1, 1)$; $\vec{N}_2 = (1, 1, 1)$. Dreapta $(D) = (P_1) \cap (P_2)$ are vectorul director coliniar cu

$$\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Luând factorul de coliniaritate $-\frac{1}{2}$, găsim

$$\vec{V} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} = (1, 1, -2).$$

Ne mai trebuie un punct al dreptei. Luând

TEMA NR. 10
pagina 2

$z=0$, din ecuațiile planelor (P_1) și (P_2) deducem

$$\begin{cases} 3x-y+1=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{7}{4} \end{cases}$$

Prin urmare, un punct al dreptei (D) are coordonatele $\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 0\right)$. Ecuațiile canonice ale dreptei (D) sunt

$$(D) \quad \frac{x-\frac{1}{4}}{1} = \frac{y-\frac{7}{4}}{1} = \frac{z-0}{-2}$$

b) Ecuațiile explicite se găsesc egalând primul raport cu ultimul și al doilea cu ultimul. Se obține

$$(D) \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{2}z + \frac{7}{4} \end{cases}$$

De menționat că ecuațiile explicite se pot obține din sistemul format din ecuațiile planelor (P_1) și (P_2) în care luăm z și y ca necunoscute.

c) Planul căutat aparține fasciculului

$$(P_\lambda): \ P_1 + \lambda P_2 = 0 \Rightarrow$$

$$(P_\lambda) \quad (\lambda+3)x + (\lambda-1)y + (\lambda+1)z + 1 - 2\lambda = 0$$

Selectăm din (P_λ) acel plan care stă perpendicular pe (P) $x-2y+3z-4=0$. Pentru aceasta impunem condiția ca normalele la (P_λ) și la (P) să fie perpendiculare. Avem

$$\vec{N}_\lambda = (\lambda+3, \lambda-1, \lambda+1), \quad \vec{N} = (1,-2,3) \Rightarrow$$

$\vec{N}_\lambda \cdot \vec{N} = 0$, $\lambda+3-2\lambda+2+3\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-4$.

Planul căutat este $P_{-4}: -x-5y-3z+9=0$ sau

$$P_{-4}: \ x+5y+3z-9=0.$$

d) Normalele $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ ale planelor (P_1) și (P_2) sunt paralele cu planul (Q). Se cunoaște un punct al lui Q, $M_0(1,-5,-3)$. Atunci

$$(Q)\ (\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{N}_1, \vec{N}_2) = 0 \Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z+3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -2(x-1) - 2(y+5) + 4(z+3) = 0 \Rightarrow$$

$$x-1+y+5-2z-6=0 \Rightarrow$$

$$(Q)\ x+y-2z-2=0$$

e) Notăm $\varphi = \measuredangle(P_1, P_2) \Rightarrow \varphi = \measuredangle(\vec{N}_1, \vec{N}_2)$

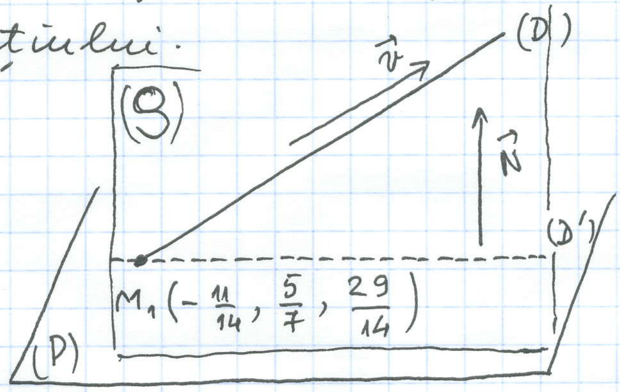
$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\| \, \|\vec{N}_2\|} = \frac{3}{\sqrt{11}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{11}}$$

f) $$d(M_0,(P)) = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$= \frac{1+10-9-4}{\sqrt{14}} = -\frac{3}{\sqrt{14}} \Rightarrow d = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Punctul M_0 se află în partea opusă normalei planului (P), adică în regiunea "−" a spațiului.

g)



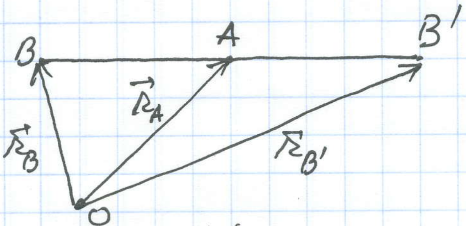
Proiecția D' se află la intersecția planului (P) cu planul S care conține dreapta (D) și este perpendicular pe planul (P). (S) se numește plan proiectant. (S) trece prin M_1 – punctul de intersecție a dreptei (D) cu planul (P) și este paralel cu $\vec{v}$ și $\vec{N}$

$$(S)\ (\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{v}, \vec{N}) = 0 \Rightarrow (S)\ x+5y+3z-\frac{117}{14} = 0 \Rightarrow (D')\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ x+5y+3z-\frac{117}{14}=0 \end{cases}$$

(2) Să se afle ecuația planului care trece prin punctul B', simetricul punctului $B(1,5,-1)$ față de punctul $A(4,0,2)$ și este paralel cu dreptele

$$(D_1)\begin{cases} 2x-y-z+1=0 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}-1=0 \end{cases}, \quad (D_2)\begin{cases} x+y=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

Rezolvare



$$\vec{r}_A = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_{B'}) \Rightarrow$$

$$\vec{r}_{B'} = 2\vec{r}_A - \vec{r}_B = (7,-5,5)$$

Prin urmare, $B'(7,-5,5)$.

Planul căutat trece prin B' găsit și este paralel cu $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$, unde $\vec{v}_1$ este direcția lui (D_1) iar $\vec{v}_2$ este vectorul director al dreptei (D_2).

$$\vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

Putem lua vectori coliniari cu aceștia. Deci

$$\vec{v}_1 = (4, 15, -7), \quad \vec{v}_2 = (1, -1, 2)$$

Ecuația planului căutat este

$$(P) \quad (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \text{ sau}$$

$$(P) \begin{vmatrix} x-7 & y+5 & z-5 \\ 4 & 15 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$23(x-7) - 15(y+5) - 19(z-5) = 0 \Rightarrow 23x - 15y - 19z - 141 = 0$$

Așadar, $(P)\ 23x - 15y - 19z - 141 = 0.$

(3) Să se scrie ecuația planului (P) care trece prin mijlocul segmentului AB, unde $A(1,7,2)$ și $B(-1,-5,-3)$, este paralel cu dreapta

$$(D)\ \frac{x+2}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z-6}{4}$$

și este perpendicular pe planul $(Q)\ x+y-1=0$.

Rezolvare. Mijlocul M_0 al segmentului AB are coordonatele egale cu semisuma coordonatelor corespunzătoare ale extremităților, deci $M_0(0,1,-\frac{1}{2})$.

Planul căutat (P) trece prin M_0, este paralel cu dreapta (D), deci $\vec{N}\perp\vec{v}$, unde $\vec{v}=(5,3,4)$ este vectorul director al dreptei (D), și perpendicular pe planul (Q), deci $\vec{N}\perp\vec{N_1}$, unde $\vec{N_1}=(1,1,0)$ este normala la planul (Q). Desigur, vectorul $\vec{N}$, normala planului căutat (P), este coliniar cu produsul vectorial $\vec{v}\times\vec{N_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=$ $=-4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$. Putem lua drept $\vec{N}$ un vector coliniar cu $\vec{v}\times\vec{N_1}$. Luăm $\vec{N}=(2,-2,-1)$.

Atunci: $(P)\ (\vec{r}-\vec{r_0})\cdot\vec{N}=0 \Rightarrow$

$$2(x-0)-2(y-1)-\left(z+\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow$$

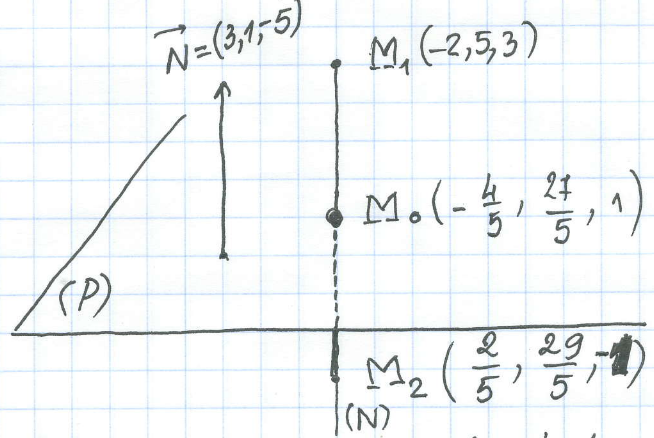
$$(P)\ 2x-2y-z+\frac{3}{2}=0, \text{ sau}$$

$$(P)\ 4x-4y-2z+3=0.$$

Observație. Se putea scrie $(P)\ (\vec{r}-\vec{r_0},\vec{v},\vec{N_1})=0$ deoarece planul (P) este paralel cu vectorii $\vec{v}$ și $\vec{N_1}$.

④ Să se afle coordonatele simetricului punctului $M_1(-2, 5, 3)$ față de planul (P) $3x + y - 5z + 2 = 0$.

Rezolvare



Notăm cu M_0 punctul de intersecție a dreptei (N) perpendiculară pe planul (P) și care trece prin punctul M_1. Vectorul director al dreptei (N) este $\vec{N}$, deci ecuațiile canonice sunt

$$(N) \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-3}{-5}$$

Trecem la ecuațiile parametrice ale lui (N) egalând cu t rapoartele egale:

$$(N) \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 + t \\ z = 3 - 5t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Intersectăm (N) cu (P) pentru a afla M_0 – proiecția punctului M_1 pe planul (P). Trebuie să rezolvăm sistemul format de ecuațiile parametrice ale dreptei (N) și ecuația planului. Se găsește $t_0 = \frac{2}{5} \Rightarrow x_0 = -\frac{4}{5}$, $y_0 = \frac{27}{5}$, $z_0 = 1$. Punctul M_2, simetricul lui M_1 față de planul (P) este astfel încât M_0 este mijlocul lui M_1M_2. Deci $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$ de unde deducem $\vec{r}_2 = 2\vec{r}_0 - \vec{r}_1 = \left(-\frac{8}{5}, \frac{54}{5}, 2\right) - (-2, 5, +3)$
$\Rightarrow \vec{r}_2 = \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{29}{5}\vec{j} - 1\vec{k} \Rightarrow M_2\left(\frac{2}{5}, \frac{29}{5}, -1\right)$.

TEMA NR. 10

pagina 7

Probleme propuse, cu indicații și răspunsuri

1. Să se afle ecuația planului care trece prin axa Oz și formează cu planul $2x+y-z\sqrt{5}-7=0$ unghiul de $60°$.

<u>Indicație</u>. Un plan care conține axa Oz are ecuația $x+\lambda y=0$, unde λ este parametru real. Se impune condiția ca unghiul diedru dintre planele $2x+y-z\sqrt{5}-7=0$ și $x+\lambda y=0$ să fie $60°$.

<u>Răspuns</u>. $\lambda_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x+3y=0$ și $3x-y=0$.

2. Să se afle ecuația planului care trece prin dreapta de intersecție a planelor $(P_1)\ x+5y+z=0$ și $(P_2)\ x-z+4=0$ și care formează un unghi de $\frac{\pi}{4}$ cu planul $(Q)\ x-4y-8z+12=0$.

<u>Indicație</u>. Planul căutat face parte din fascicolul care are ca plane bază planele (P_1) și (P_2), deci ~~are ecuația~~ are ecuația $P_1+\lambda P_2=0$ sau $(\lambda+1)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$, normala sa fiind $\vec{N}_\lambda=(\lambda+1, 5, 1-\lambda)$. Normala la planul (Q) este $\vec{N}_Q=(1,-4,-8)$. Se impune condiția ca $\measuredangle(\vec{N}_\lambda, \vec{N}_Q)=\frac{\pi}{4}$, de unde rezultă $\lambda=-\frac{3}{4}$.

<u>Răspuns</u>. $x+20y+7z-12=0$.

3. Să se afle ecuațiile proiecției (D') a dreptei

$$(D)\begin{cases} x-4y+2z-5=0 \\ 3x+y-z+2=0 \end{cases}$$

pe planul $(P)\ 2x+3y+z-6=0$.

Răspuns.

$$(D')\begin{cases} 2x+3y+z-6=0 \\ 4x-3y+z-3=0 \end{cases}$$

Observație. Cel de al doilea plan din (D') este planul proiectant al dreptei (D) pe planul (P). Evident, planul proiectant face parte din fasciolul de plane ce au ca plane bază planele care definesc pe (D).

4. Să se verifice dacă următoarele perechi de drepte se intersectează sau nu. În caz că sunt concurente să se scrie ecuația planului determinat de ele:

a) $(D_1)\begin{cases} x=2-t \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ și $(D_2)\begin{cases} x=-1+7s \\ y=8-3s \\ z=3+s, \ s\in\mathbb{R} \end{cases}$

b) $(D_1)\begin{cases} x=2+t \\ y=1-3t \\ z=-1+t, \ t\in\mathbb{R} \end{cases}$ și $(D_2)\begin{cases} x=1+s \\ y=-s \\ z=5-3s, \ s\in\mathbb{R}. \end{cases}$

Răspuns. a) (D_1) și (D_2) sunt concurente. Planul determinat de aceste drepte este $(P)\ 3x+4y-9z-2=0$

b) $M_1(2,1,-1)\in(D_1)$, $\vec{v}_1=(1,-3,1)$ este vectorul ei director.
$M_2(1,0,5)\in(D_2)$, $\vec{v}_2=(1,-1,-3)$ – vectorul director.
Deoarece $(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2)\neq 0$ rezultă că (D_1) și (D_2) sunt strâmb așezate în spațiu.

5. Să se calculeze distanța dintre dreptele

$$(D_1)\ \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{1} \quad \text{și}$$

$$(D_2)\ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-5}{-3}.$$

Răspuns. Dreptele sunt strâmb așezate în spațiu pentru că produsul mixt $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \neq 0$, unde $M_1(2,1,-1) \in (D_1)$, $M_2(1,0,5) \in (D_2)$, $\vec{v}_1 = (1,-3,1)$ și $\vec{v}_2 = (1,-1,-3)$. Distanța se calculează cu formula

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}$$

Se găsește $d = \frac{1}{\sqrt{21}}$.

6. Să se calculeze unghiul φ dintre dreptele

$$(D_1)\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}, \quad (D_2)\begin{cases} x-y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases}$$

Răspuns. $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

7. Să se găsească distanța de la punctul $A(3,-1,2)$ la dreapta $(D)\begin{cases} 2x-y+z-4=0 \\ x+y-z+1=0. \end{cases}$

Răspuns. $d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

8. Știind că $M(3,4,2)$ este piciorul perpendicularei coborâte din origine pe planul (P), să se scrie ecuația acestui plan.

Răspuns. $(P)\ 3x+4y+2z-29=0$.

9. Să se scrie ecuația planului ce trece prin punctul $M_0(1,2,1)$ și este perpendicular pe planele (P_1) $3x-2y+1=0$ și (P_2) $2x+z-3=0$.

Răspuns. (P) $2x+3y-4z-4=0$.

10. Să se scrie ecuația planului (P) care trece prin punctele $M_1(1,2,1)$, $M_2(2,3,4)$ și este perpendicular pe planul (Q) $2x+3y+z=0$.

Răspuns. (P) $8x-5y-z+3=0$.

11. Să se găsească parametrii λ și μ astfel încât planele (P_1) $2x-y+3z-1=0$, (P_2) $x+2y-z+\mu=0$, (P_3) $x+\lambda y-6z+10=0$ să aibă:

1) un punct comun;
2) o dreaptă comună;
3) să se intersecteze după trei drepte distincte paralele (formează un "tub prismatic").

Indicație. Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & \lambda & -6 \end{pmatrix}$ și $\bar{A}=\left(A \;\middle|\; \begin{matrix} -1 \\ \mu \\ 10 \end{matrix}\right)$ matricea, respectiv matricea extinsă a sistemului format cu ecuațiile planelor. Se impun condițiile: 1) $r_A=3$ ($\Leftrightarrow \det A\neq 0$); 2) $r_A=r_{\bar{A}}=2$; 3) $r_A=2$, $r_{\bar{A}}=3$.

Răspuns. 1) $\lambda\neq 7$; 2) $\lambda=7$, $\mu=3$; 3) $\lambda=7$, $\mu\neq 3$.

12. Să se găsească un punct pe axa Oy situat la distanțe egale de planul $3x-4y+25=0$ și de punctul $M_0(4,0,3)$.

Indicație. Se ia $M(0,t,0)$.

Răspuns. $t_1=0$, $t_2=\frac{200}{9}$ $\Rightarrow$ $M_1\equiv O$; $M_2\left(0,\frac{200}{9},0\right)$.